Vermutungen von Polignac und Goldbach

Hans Walther Ernst Gerhart Schmidt

18. März 2014

Keywords: prime numbers, Polignac, Goldbach

Abstract

Proofs are given for a conjecture of Polignac and a modified conjecture of Goldbach.

1. Satz von Polignac

Im Jahre 1849 vermutete Alphonse de Polignac nach [1] folgenden

Satz 1.: Zu jedem geraden Abstand zweier Primzahlen $2n = p_2 - p_1$, $n \geq 1$ natürliche Zahl, gibt es unendlich viele Primzahlpaare $\{p_1, p_2\}$.

In [2] wurde die Gültigkeit von Satz 1 für $n = 1$ (Primzahlzwillinge) bewiesen und sei hier wiederholt als

Satz 2.: Die mittlere streuende Anzahl $\pi_{2,s}(\eta_n)$ von Primzahlzwillingen im links offenen Quadratintervall $\eta_n := \left(n^2, (n+1)^2\right]$ beträgt

$$\pi_{2,s}(\eta_n) = (2n+1)\left(\frac{A'}{2\ln(n+1)}\right)^2 (1+\delta_2) \ , A^{'} \approx 1,06. \tag{1}$$

Darin gilt für den Mittelwert $\delta_2 = 0$; für die mittlere Oberschranke

$$\delta_2 = \delta_{2,+} = 2\left(\frac{A'}{\ln(n+1)}\right)^2 + \frac{4A'}{\ln(n+1)} \tag{2}$$

und für die mittlere Unterschranke

$$\delta_2 = \delta_{2,-} = 2\left(\frac{A'}{\ln(n+1)}\right)^2 - \frac{4A'}{\ln(n+1)} \ . \tag{3}$$

Da schon $\pi_{2,s}(\eta_n)$ für $\eta_n \to \infty$ über alle Schranken wächst, divergiert $\pi_2(n)$ erst recht für $n \to \infty$.

Bemerkung: Im Abschnitt 5.4 von [2] wird darauf hingewiesen, daß die maximalen Ober- und Unterschranken höchstens um einen Faktor 2 größer sein können.

Außerdem wird mit Formel (103) in [2] das Goldbach-Theorem bewiesen, das hier angefügt sei als

Satz 3.: Die streuende Vielfachheit der Anzahl von Goldbachpaar-Darstellungen einer gegebenen Zahl $2m$ beträgt

$$v_{2m} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{A'}{\ln(n+1)}\right)^2 (1+\delta_{2,g}) \ , 2m \in \eta_n \, , \tag{4}$$

wobei für mittlere und maximale Ober- und Unterschranken gilt

$$\delta_{2,g} \approx 2\delta_2 \ und \ \delta_{2,g,max} \approx 4\delta_2. \tag{5}$$

Bemerkung: Der Faktor $f = 2$ in $\delta_{2,g} \approx 2\delta_2$ gilt für hinreichend große n, d.h. $p_1 \in \eta_{A,n}, \ p_2 \in \eta_n, \ \eta_{A,n} = [0, 2n+1] \ll \eta_n$. Er verringert sich gegen den Wert f=1, wenn Zahlenpaare betrachtet werden, deren Abstand sich dem Zwillingsabstand 2 nähert.

Bew. von Satz 1.: Die Beweise der Sätze 2 und 3 beruhen beide - wie auch der Satz von Polignac - auf der Betrachtung eines Primzahlpaares, lediglich mit unterschiedlichem Primzahlabstand, welcher nur den Faktor f beeinflußt, $2 \geq f \geq 1$. Daher gilt Satz 1 bei geeigneter Wahl des Faktors f für alle $n < \infty$, denn die Vielfachheit analog unseren Formeln (1) und (4) divergiert stets für $n \longrightarrow \infty$; in jedem Intervall η_n mit $n \geq n_0$ ist der Zuwachs von die Behauptung von Satz 1 erfüllenden Beiträgen ≥ 1; **q.e.d.**

In diesem Sinne stellen der Primzahlzwillingssatz und das Goldbach-Theorem die beiden extremalen Spezialfälle von Satz 1 dar.

2. Zweite Goldbach-Hypothese

Eine zweite Hypothese von Christian Goldbach besagte, daß jede ungerade Zahl $m \geq 5$ eine Darstellung

$$m = p + 2n^2 \tag{6}$$

hat, worin $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $p \geq 3$ eine Primzahl bedeuten. Diese Hypothese prüfte Leonhard Euler $\forall m \leq 2500$, ohne ein Gegenbeispiel zu finden. Jedoch widerlegte Moritz Stern (1807-95) die Hypothese durch Angabe von zwei Gegenbeispielen: $m_1 = 5777$, $m_2 = 5993$. Die Gültigkeit der Hypothese konnte numerisch $\forall m < 5777$ bestätigt werden. Ein weiteres Gegenbeispiel für größere m konnte bis heute nicht gefunden werden. Ob es solche geben kann, soll hier einem Wahrscheinlichkeitstest unterzogen werden. Wir formulieren den von der Hypothese abweichenden

Satz 4.: Die Anzahl M von ungeraden Zahlen $m \geq 5$, die keine Darstellung (6) haben, ist endlich. Es gilt $2 \leq M \leq M_0 < \infty$. Es gibt $\forall m > 55778 = 2 \cdot 167^2$ keine ungeraden Zahlen, die (6) nicht erfüllen. Die Vielfachheit V der Darstellbarkeit von m als $m = p_i + 2n_i^2$ beträgt im Mittel

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{A'}{\ln(2i^2)} \ , A' \approx 1,06; \tag{7}$$

ihre mittlere Abweichung beträgt

$$\pm V' = 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{A'}{\ln(2i^2)} \right)^2 \tag{8}$$

und ihre maximale Abweichung ist

$$\pm V_{max} = 2V'. \tag{9}$$

Tabelle 1

n	V_{real}	V	$V - V_u$
4	1	2,7	-8,6
5	2	3,0	-8,8
19	3	5,7	-8,0
20	4	5,8	-8,0
29	5	7,2	-7,4
31	6	7,4	-7,3
40	7	8,7	-6,7
46	8	9,4	-6,4
59	9	11,0	-5,6
61	10	11,3	-5,4
71	11	12,4	-4,8
74	12	12,8	-4,6
79	13	13,3	-4,4
110	14	16,7	-2,4
124	15	18,1	-2,0
125	16	18,3	-1,8
136	17	19,4	-1,2
139	18	19,7	-1,0
146	19	20,4	-0,6
151	20	20,9	-0,3
160	21	21,7	0,15
170	22	22,7	0,7
176	23	23,3	0,8
181	24	23,8	1,1
190	25	24,6	1,6
194	26	25,0	1,8
200	27	25,6	2,2
214	28	26,9	3,0
215	29	27,0	3,1
236	30	28,9	4,3
244	31	29,6	4,7
250	32	30,2	5,1

Bemerkung: Zur Ermittlung der genauen Anzahl M_0 genügt die numerische Überprüfung aller ungeraden Zahlen $5993 < m < 55778$, da $m_{1,2}$ als die kleinsten Zahlen dieser Art erwiesen sind.

Es ist bemerkenswert, daß auch für eine fest gewählte größere Zahl m_0 die i-te Darstellung $p_i + 2n_i^2$ innerhalb der Streugrenzen unserer Formeln (7) bis (9) erreicht wird. Dies sei demonstriert am Beispiel $m_0 = 125853$, **Tab.1**

Bew.: Nach (88),(89) in [2] beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zahl $x \in \eta_n$ Primzahl ist,

$$W(x) = \frac{\pi(\eta_n)}{b_n} = \frac{A'}{2\ln(n+1)} \approx \frac{A'}{\ln x} \tag{10}$$

mit der Intervallbreite $b_n = 2n + 1$ von η_n. Die mittlere Abweichung davon ist

$$W_f(x) = 2\left(\frac{A'}{2\ln(n+1)}\right)^2, \tag{11}$$

die maximale Abweichung

$$W_{f,max} = 2W_f(x). \tag{12}$$

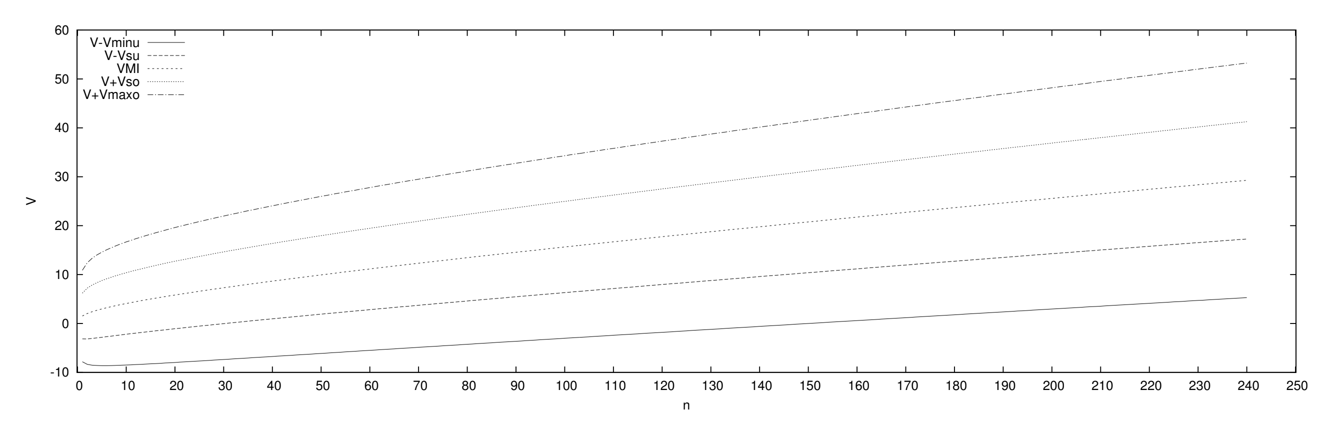
Die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebig gewählte Zahl $m = x + 2i^2$ auf eine Primzahl $x = p_i = m - 2i^2$ führt, ist durch (10) gegeben. Die Anzahl möglicher Quadratzahlen $\leq m$ ist $n = \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right] \geq i$, wobei [.] den ganzzahligen Anteil bezeichnet. Daher liefert

$$W_{GH} = \sum_{i=1}^{n} W(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A'}{\ln(2i^2)} =: V \tag{13}$$

den wahrscheinlichen Wert der Vielfachheit der Darstellbarkeit von m gemäß (6). Die wahrscheinliche Abweichung davon ist dann gegeben durch V' gemäß (8) und die maximal mögliche Abweichung gemäß (9).

Die mittlere Erwartung V gilt auch für den Bereich $5 \leq m \leq 2 \cdot 167^2$. Weil aber der Streubereich darin größer als der Erwartungswert ist, kann es Zahlen m geben, für die $W_{GH}(m) = 0$ gilt; **q.e.d.**

Die **Abb.1** zeigt die graphischen Darstellungen von V nach (7), $V - V'_{u,o}$ nach (8) und $V - V_{u,o}$ nach (9) über n. Daraus ist abzulesen, daß $V - V'_u = 0$ etwa bei $n \approx 31$ und $V - V_{u,max} = 0$ bei $n \approx 150$ bzw. $V - V_{u,max} \geq 1$ bei $n = 167$ erreicht ist. Da die Kurven von da an für $n \to \infty$ divergieren, sind Werte von $V < 1$ für $n > 167$ nicht mehr möglich.



Danksagung

Für die Systembetreuung meines PC danke ich Christian Schmidt-Gütter und für Unterstützung bei der Arbeit mit LaTeX und gnuplot Susanne Gütter.

Literatur

[1] Weisstein, Eric W. "de Polignac's Conjecture." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/dePolignacsConjecture.html

[2] Schmidt, H. W. "Einige Sätze über Primzahlen und spezielle binomische Ausdrücke". http://archive.org/details/PrimzahlenHWS.pdf